

Carl Friedrich Gauss ve İstatistik Teorisine Katkıları

Adınız Soyadınız

March 28, 2025

1 Giriş

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), tüm zamanların en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilir. Matematik, fizik, astronomi ve istatistik alanlarında çığır açan çalışmalar yapmıştır Dunnington [1955]. Bu makalede, Gauss'un özellikle istatistik teorisine katkıları incelenecektir.



Figure 1: Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Şekil 1'te görülen Gauss, istatistikteki çalışmalarıyla modern veri analizi metotlarının temelini atmıştır. Özellikle normal dağılım (Gaussian dağılım) ve en küçük kareler yöntemi ile ilgili çalışmaları bugün hala yaygın olarak kullanılmaktadır Stigler [1981].

2 Normal Dağılım

Teorem 1 (Normal Dağılım). *Bir rastgele değişken X 'in normal dağılıma sahip olması, olasılık yoğunluk fonksiyonunun aşağıdaki formda olması demektir:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1)$$

Burada μ ortalamayı, σ ise standart sapmayı temsil eder.

Teorem 1'de tanımlanan ve Denklem 1'de formülü verilen normal dağılım, istatistikte merkezi limit teoreminin bir sonucu olarak karşımıza çıkar. Normal dağılımın birçok önemli özelliği vardır:

- Simetrik bir dağılımdır
- Ortalama, medyan ve mod aynı değere sahiptir
- Toplam alanı 1'e eşittir
- Değerlerin yaklaşık %68'i $\mu \pm \sigma$ aralığındadır

Lemma 2 (Merkezi Limit Teoremi). *Bağımsız ve aynı dağılıma sahip, sonlu varyansa sahip rastgele değişkenlerin normalize edilmiş toplamı, örneklem büyüklüğü yeterince büyük olduğunda, normal dağılıma yakınsar.*

Gauss'un adıyla da anılan normal dağılım, 2. sayfada açıklanan Lemma 2 (Merkezi Limit Teoremi) ile doğrudan ilişkilidir.

3 En Küçük Kareler Yöntemi

Teorem 3 (Gauss-Markov Teoremi). *Doğrusal regresyon modelinde, Gauss-Markov varsayımları altında, en küçük kareler tahmincisi, yansız doğrusal tahminciler arasında en düşük varyansa sahiptir (BLUE - Best Linear Unbiased Estimator).*

Gauss, gözlemsel hataların analizinde devrim yaratan en küçük kareler yöntemini geliştirmiştir Plackett [1972]. Bu yöntem, günümüzde regresyon analizinin temelidir ve Teorem 3 (2. sayfada) ile matematiksel olarak desteklenmektedir.

En küçük kareler problemi, aşağıdaki gibi ifade edilir: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ modelinde, artık hataların kareleri toplamını minimize eden $\boldsymbol{\beta}$ değerlerini bulmak.

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 \quad (2)$$

$$= \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (3)$$

Denklem 2 ve 3’de gösterildiği gibi, en küçük kareler yöntemi matris formunda da ifade edilebilir. Çözüm, normal denklemler olarak bilinen aşağıdaki ifadeyle elde edilir:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (4)$$

Buradan, en küçük kareler tahmincisi şöyle hesaplanır:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (5)$$

Denklem 5, en küçük kareler tahmincisinin kapalı form çözümünü vermektedir ve Gauss’un en önemli katkılarından biridir.

4 Gauss’un Katkılarının Özeti

Gauss’un matematik ve istatistik alanındaki katkıları geniş bir yelpazede yer alır. Tablo 1’de bu katkıların bir özeti verilmiştir.

Table 1: Gauss’un Matematik ve İstatistiğe Katkıları

Alan	Katkı	Yıl
Sayı Teorisi	Aritmetiğin Temel Teoremi	1799
Astronomi	Ceres’in Yörüngesi	1801
İstatistik	Normal Dağılım (Teorem 1)	1809
İstatistik	En Küçük Kareler Yöntemi (Denklem 5)	1809
Diferansiyel Geometri	Egregium Teoremi	1827
Fizik	Elektromanyetizma Yasaları	1833

Tablo 1’den görülebileceği gibi, Gauss’un katkıları yalnızca istatistikle sınırlı değildir. Ancak bu çalışmada, özellikle Teorem 1 ve Teorem 3 ile ifade edilen katkılarına odaklanılmıştır.

5 Gaussian Eliminasyon Örneđi

Gauss'un adıyla anılan bir diđer önemli matematik tekniđi, doğrusal denklem sistemlerini çözmek için kullanılan Gaussian eliminasyondur. Bu yöntemi bir örnek üzerinde gösterelim.

Örnek 1. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini Gaussian eliminasyon yöntemiyle çözelim:

$$2x + y - z = 8 \quad (6)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (7)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (8)$$

Denklem 6, 7 ve 8'ten oluşan bu sistemi genişletilmiş matris olarak yazalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \quad (9)$$

Adım 1: İlk satırı kullanarak ikinci satırdan $\frac{-3}{2}$ katını, üçüncü satırdan $\frac{-2}{2}$ katını çıkaralım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad (10)$$

Adım 2: İkinci satırı 2 ile çarparak daha temiz hale getirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad (11)$$

Adım 3: İkinci satırı kullanarak üçüncü satırdan 2 katını çıkaralım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad (12)$$

Adım 4: Üçüncü satırı -1'e bölelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad (13)$$

Şimdi geriye doğru yerine koyarak çözümü bulalım:

$$z = -1 \quad (14)$$

$$y + z = 2 \implies y = 2 - (-1) = 3 \quad (15)$$

$$2x + y - z = 8 \implies 2x + 3 - (-1) = 8 \implies 2x = 4 \implies x = 2 \quad (16)$$

Denklem 16, 15 ve 14 kullanılarak, sistemin çözümü $(x, y, z) = (2, 3, -1)$ olarak bulunur.

6 Sonuç

Carl Friedrich Gauss, sadece kendi zamanında değil, günümüzde de matematik ve istatistik biliminin en önemli figürlerinden biridir. Özellikle Teorem 1’de açıklanan normal dağılım ve Teorem 3 ile ilişkili en küçük kareler yöntemi üzerine yaptığı çalışmalar, modern istatistik teorisinin temellerini oluşturmuştur.

Lemma 2 (Merkezi Limit Teoremi) ile bağlantılı olarak, Gauss’un istatistikteki katkıları teorik temellerden pratik uygulamalara kadar geniş bir alanı kapsamaktadır. Denklem 1’de formüle edilen normal dağılım ve Denklem 5’de verilen en küçük kareler tahmincisi, istatistiğin temel araçları haline gelmiştir.

Tablo 1’da özetlendiği gibi, Gauss’un çalışmaları, veri analizinden sinyal işlemeye, finanstan mühendisliğe kadar birçok alanda hala yaygın olarak kullanılmaktadır Kendall et al. [1989].

References

- G. Waldo Dunnington. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. Exposition Press, 1955.
- M.G. Kendall, A. Stuart, and J.K. Ord. *Kendall’s Advanced Theory of Statistics*. Oxford University Press, 1989.
- R. L. Plackett. Studies in the history of probability and statistics: Xxix. the discovery of the method of least squares. *Biometrika*, 59(2):239–251, 1972.
- Stephen M. Stigler. Gauss and the invention of least squares. *The Annals of Statistics*, 9(3):465–474, 1981.